

Cevap Anahtarı

Halka Teorisi Dersi Final Soruları

- 1- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ile $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ halkalarının izomorf olup olmadığını araştırınız.
- 2- a) I ve J , R Tamlik bölgesinin sıfırdan farklı iki ideali olsun. 0 zaman $I \cap J \neq \{0_R\}$ olduğunu gösteriniz.
b) idempotent elemanı tarif ediniz. \mathbb{Z}_2 halkasının idempotent elemanlarını bulunuz.
- 3- $\{A_1, \dots, A_n\}$ R halkasının ideallerinin sonlu ailesi olsun. $\sum_{i=1}^n A_i$, R halkasının bir idealidir, gösteriniz.
- 4- R , Noether halkası ise her ideali sonlu üretilmiştir, gösteriniz.
- 5- R birimli bir halka $\{A_1, \dots, A_n\}$ R 'nin ideallerinin sonlu bir ailesi olsun.
 $R = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ ise $e_i \in A_i$ ($i=1,2,\dots,n$) idempotent elemanlar olmak üzere
 - 1) $1 = e_1 + \dots + e_n$
 - 2) $\forall i=1,2,\dots,n$ için $Re_i = A_i$
 - 3) $i \neq j$ için $e_i e_j = e_j e_i = 0$ olduğunu gösteriniz.

1- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ve $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ halkaları izomorf olsun o zaman $f: \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ fonksiyonu izomorfizma olup $f(1) = 1$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = n$ dir. $2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow$
 $f(2) = f((\sqrt{2})^2) = f(\sqrt{2})^2 = 2 \Rightarrow f(\sqrt{2}) \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ olduğundan
 $f(\sqrt{2}) = a + b\sqrt{3}$, $2 = (a + b\sqrt{3})^2 = a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{3}$ bulunur.
 $a \cdot b = 0 \Rightarrow 2 = a^2 + 3b^2$, $a, b \notin \mathbb{Z}$ dir. $a \cdot b \neq 0 \Rightarrow$
 $\sqrt{3} = \frac{2 - a^2 - 3b^2}{2ab} \in \mathbb{Q}$ olup geliski o halde izomorf değildir

2- a) $I \neq \{0_R\}$ ve $J \neq \{0_R\}$ olsun. $\exists a \in I, \exists b \in J, a \neq 0_R, b \neq 0_R$ olacak şekilde vardır. I ve J ideal olduğundan $ab \in I \wedge ab \in J$ olup R T.B olduğundan $a \cdot b \neq 0_R$ olup $I \cap J \neq \{0_R\}$ bulunur.

2-b) R bir halka olsun. $x \in R$ için $x^2 = x$ ise x 'i se R 'nin idempotent elemanı denir.

\mathbb{Z}_{12} halkasının idempotentleri

$$\bar{0}^2 = \bar{0},$$

$$\bar{1}^2 = \bar{1},$$

$$\bar{4}^2 = 16 = \bar{4}$$

$$\bar{9} = 81 = \bar{9} \text{ olup } \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{9} \} \text{ dir.}$$

3- Defterde Var

4- Defterde Var

5- Defterde Var